Estylf - XVII.

Zaragoza, 5 de Febrero, 2014.

CONJUNTO BORROSO: UN CONCEPTO DE RAÍZ MÁS CIENTÍFICA QUE PURAMENTE MATEMÁTICA (*)

Enric Trillas

European Centre for Soft Computing, Mieres (Asturias)

(*) ***Abe Mamdani, In Memoriam***.

1. INTRODUCCIÓN

Los conjuntos borrosos suelen verse como una generalización matemática de los conjuntos nítidos. No es falso, pero es poco; es una creencia que, en cierta medida, proviene de la suposición de que las agendas de las dos teorías son análogas, pero no es así. Por ejemplo, el álgebra de Boole de los conjuntos nítidos tiene muchas leyes que no se reflejan en propiedades universalmente válidas en el lenguaje natural.

El lenguaje natural está plagado de términos lingüísticos que, al actuar en un conjunto nítido X y como muestra la metodología del Sorites, no pueden especificarse en forma de conjuntos nítidos, sino que debe hacerse por medio de conjuntos borrosos. Si para un investigador de lo clásico el Sorites es una paradoja, para un investigador de lo borroso es una prueba de imposibilidad.

Además, el axioma de especificación no puede aplicarse a 'todos' los predicados ya que no hay conectivos universalmente válidos para los predicados no-nítidos.

¿Qué puede entenderse por “especificar” un predicado no-nítido?

<Se trata de predicados P tales que el significado de los enunciados elementales “x es P”, con los x en un universo del discurso X (nítido) y que describen su comportamiento en el mismo, no admiten una definición del tipo “sí y sólo sí” como, por ejemplo, sucede con ‘par’ en N, o con ‘trascendente’ en R.

P no es sino un nombre dado a una propiedad, p, exhibida por los elementos de X. Muchas propiedades usuales en el lenguaje natural sólo se muestran en forma graduable. ¿Qué es tal cosa? De ello voy a ocuparme.>

Los enunciados elementales con esos predicados pueden describirse, a lo más, por medio de algunas reglas que son insuficientes para determinar una especificación nítida del predicado; son necesarias pero no suficientes.

Aunque los elementos de X pueden tener carácter real o virtual, los enunciados elementales ‘x es P’ no son sino expresiones lingüísticas que no tienen más realidad que lo que significan. ¡Nunca confundir enunciado con realidad!

Por ejemplo, si es X = [0, 1000] y se considera el predicado típicamente binario M, nombre de la propiedad m = mayor o igual que 770, es

*"x es M" ssi x verifica m ⇔ x **≥** 770,*

*su especificación es el intervalo **P** = [770, 1000] contenido en X y no cabe afirmar más enunciados elementales "x es M" que aquellos con x en **P.***

De considerar el predicado, típico del lenguaje natural, G(<= g) = grande, en el mismo universo [0. 1000], la situación será radicalmente distinta:

No es posible definir el significado de "x es G" en forma equivalente y con otros enunciados precisos, es decir, en la forma "ssi".

*Por ello no existe, necesariamente, un subconjunto clásico **G** de [0, 1000] permitiendo afirmar: "x es G" equivale a afirmar "x ∈ **G".***

No obstante, como G se usa normalmente en el lenguaje, cabe 'describir' qué se quiere decir al afirmar "x es G":

- *No cabe afirmar "0 es G" y sí cabe afirmar "1000 es G".*
- *Si [cabe afirmar "x es G" e y es un número mayor que x (x ≤ y)], entonces también cabe afirmar "y es G".*

Dos reglas que hay que emplear para expresar el significado de G en X; cualquier forma de usar grande en X deberá cumplirlas, sin excluir que algunos usos de G puedan cumplir otras reglas adicionales. Obviamente el predicado M es un uso particular del G ya que verifica las dos reglas citadas.

Sin embargo, si <u>grande</u>, ahora G(con la misma propiedad g anterior), se refiriese a pesos entre 0 y 1000 miligramos de alguna substancia química, aunque X sería el mismo intervalo [0, 1000] sus elementos no indicarían simplemente números, sino miligramos de peso y podría bien ser que debiésemos añadir una tercera regla como:*

- *Si cabe afirmar que "x es G*", para tal x existe un número* $10^{-n(x)}$ *tal que también cabe afirmar "*$x + 10^{-n(x)}$ *es G*", y otro* $10^{-m(x)}$ *tal que "*$x-10^{-m(x)}$ *es G*".*

De aceptar que 'grande' se usa de arreglo con las tres reglas citadas para G, entonces M no es un uso particular de G*, puesto que si todo número de la forma* $770 + 10^{-n}$ *será grande, no sucederá lo mismo con ninguno de la forma* $770 – 10^{-m}$.

Hay un corte abrupto entre lo que se puede y lo que no se puede afirmar que se corresponda con el uso G.*

El significado de P en X, por tanto, no es único sino que puede tener muchas acepciones, dependiendo del contexto en el que se inscriba su uso y del propósito que se persiga con el mismo.

*Sin embargo, cada vez que P se usa en X, el lenguaje "parece" designar en X un **colectivo** que designaré por **P** **['los números grandes' entre 0 y 1000]. El concepto de colectivo no debe confundirse, como se hace de ordinario, con el de conjunto borroso; cada conjunto borroso no es sino una forma de 'visualizar' al colectivo.***

S**i **G** representase el colectivo de los números grandes, **M=** [770, 1000] sería el colectivo de los números mayores de 770 y **G el de los pesos en miligramos que son pesos grandes.*

*< ¿Cómo representar los colectivos **G** y **G***?>*

La existencia de la entidad “colectivo en X designado por P” es una hipótesis bien soportada por el lenguaje; se habla de “los españoles viejos” o de “los españoles calvos” como de unas entidades incluidas en el conjunto de los españoles pero distintas del mismo.

- *La hipótesis es que, en el lenguaje, los predicados ‘colectivizan’ los elementos de los que se afirman.*
- *El problema teórico reside no sólo en describir tales colectivos, sino en cómo representarlos o especificarlos matemáticamente.*

*<En los ejemplos anteriores, sólo **M** es un subconjunto nítido de X, en tanto que ni las dos reglas que cumple G, ni las tres que cumple G*, especifican necesariamente un subconjunto nítido de X, como cabe probar matemáticamente por reducción al absurdo.>*

*Está claro que **G** puede estar reducido a un intervalo [g, 1000], como es el caso de M con g = 770; no obstante, más información o más condiciones sobre su uso puede llevar a que la especificación no sea nítida como sucede al ‘suavizar’ G como G*.*

*<Desde un punto de vista informal, el colectivo **G*** es una entidad más bien nebulosa. Para proyectarla y poder reconocerla, están los conjuntos borrosos.>*

La visión que propongo de los conjuntos borrosos como estados informacionales de un colectivo, o de su predicado, responde al hecho de que, realmente, las agendas de las teorías de conjuntos y de conjuntos borrosos son bien diferentes. La segunda está referida esencialmente a faltas de información, excesos de incertidumbre, necesidad de imprecisión, falta de equivalencia, bordes imprecisos, etc.

< Como tantos conceptos científicos y no puramente lógico-matemáticos.>

Tanto lo creo así que, de estar en mis manos, cambiaría el nombre ‘Fuzzy Logic’ por el de ‘Hazy Science’.

De no entender a los conjuntos borrosos como objetos más típicamente científicos que no lógicos o puramente matemáticos, no se consigue captar bien qué la lógica borrosa no es sólo, ni mucho menos, una 'lógica', sino una ciencia más experimental que formal y en la que los modelos matemáticos no son sino instrumentales. Por ejemplo, la consideración de umbrales de indistinguibilidad es una diferencia importante entre la 'lógica borrosa' y la 'lógica'.

Un investigador científico no debe mitificar la matemática que usa; lo esencial es el sujeto de la investigación que, en la lógica fuzzy, no es otro que el lenguaje natural y, con él, el razonamiento de sentido común. Esa es la vía para ayudar al progreso del Soft Computing.

<"Both philosophy and mathematics can become scholastic (i.e., like medieval discussions on how many camels can pass through the eye of a needle) in the hands of some practitioners"

(Abe Mamdani)>.

2. PREDICADOS MEDIBLES

Sea P en X; su significado se conoce a través de cómo se usan los enunciados elementales "x es P" con los x de X y para lo que sólo existen las dos posibilidades excluyentes:

1ª) Cabe describir qué se quiere decir con "x es menos P que y" o, equivalentemente, "y es más P que x";

2ª) No cabe hacer una tal descripción.

En 1º, se tiene una relación que, eventualmente, puede permitir llegar a medir cuán P es cada x, como sucede con términos como "longitud", "superficie", "volumen", "intensidad eléctrica", etc.

En 2º, tanto podrá ser que no se conozca ningún par de elementos x, y ligados por la tal relación, como que ella sea inimaginable con la información disponible.

En todo caso, se tratará de una relación empírica y de tipo perceptivo que, también en todo caso, requiere de un consenso ‘observacional’ (uso colectivo) por lo que pueda referirse a sus características.

- *<“Graduar sus percepciones es una notable capacidad humana”.*

  (Lotfi A. Zadeh)>

- *Un ejemplo del primer caso es el predicado “grande” en el universo [0, 1000], donde se entiende que,*

  “x es menos grande que y” sí y sólo sí x **≤** *y,*

en el orden lineal de los números reales.

- *Ejemplos del segundo caso son los predicados "omnipotente", como equivalente a "en posesión de todas las potencialidades posibles", en un universo de personas, y "describible" en uno de conceptos.*
- *En el caso de 'omnipotente', no es posible que sea "x es menos omnipotente que y"; todos los x son bien "igualmente P" y, en ese sentido, son equivalentes, o bien no lo son. La relación "menos omnipotente que" está limitada a la "igualmente omnipotente que".*
- *En el de 'describible' y para captar qué se quiere decir con "x es describible", se requiere establecer tanto el universo de los elementos x, como el tipo de descripción que se use y sí permite percibir cuando es x menos describible que y. Todo ello en el contexto que sea.*

El predicado "describible" sólo corresponderá al primer tipo cuando esas características puedan establecerse y, con ellas, una relación "menos describible que".

No cabe imaginar que significa 'alto'-en-Zaragoza sin, para dos de sus habitantes, saber cuál de los dos es menos, más, o igualmente alto que el otro.

Para trabajar con un predicado tanto es esencial conocer X, cuanto saber describir cómo el predicado actúa en X, es decir, cómo varía entre los elementos de X. Para ello, hay que disponer de conocimiento contextual.

- *<"La forma de las proposiciones en ambos juegos de lenguaje es la misma: X es más claro que Y".*
- *"El significado de una palabra es su uso en el lenguaje" (Ludwig Wittgenstein)>*

De conocerse la relación lingüística, perceptiva y empírica,

"x es menos P que y",

diremos que P es medible en X y quedará inducida una relación binaria $\leq_P$ en X, definida por:

$$x \leq_P y \Leftrightarrow x \text{ es menos } P \text{ que } y,$$

la cual facilita el grafo $(X, \leq_P)$, que representa la organización o estructura más elemental que el uso de P genera en X.

De ser $\leq_P = \emptyset$, se dirá que P es <u>insensato</u> o <u>insignificante</u> (meaningless,en inglés) en X; sería el caso, por ejemplo, de P = pesado aplicado al conjunto de los números naturales.

Se aceptará que el grafo $(X, \leq_P)$ representa el <u>significado</u> <u>primario</u> del predicado medible P en X; el simple uso de los enunciados elementales transforma el conjunto X en una estructura algebraica. Es un conocimiento cualitativo.

Si X fuese previamente amorfo, desestructurado, pasaría a estar provisto de una cierta estructura la cual se corresponde con la idea intuitiva de que los discursos sobre algo intentan introducir un orden clarificador en ese algo.

Se dirá que un predicado P es <u>metafísico</u> en X en tanto no sea medible en X.

<Su análisis ni me corresponde, ni siquiera me interesa.>

-

*- Como sea que cabe imaginar varias posibilidades de aplicar el predicado "pesado" a los números naturales, antes de fijar una de ellas el predicado es insignificante en **N,** pero no es metafísico.*

- *El predicado "vago" es metafísico en un universo de enunciados, al no saberse, hasta hoy, cuándo dos enunciados son más, menos o igualmente vagos.*

- *El predicado "borroso" es sin embargo medible (orden sharpened y fuzzy entropy).*

<"Si no lo puedes medir, no es ciencia".
(Lord Kelvin)>

Una medida numérica del significado primario, es una función

$$t_P: X \rightarrow [0, 1],$$

tal que

a) Si es $x \leq_P y$, entonces $t_P(x) \leq t_P(y)$.

b) Si x es maximal en $(X, \leq_P)$, es $t_P(x) = 1$.

c) Si y es minimal en $(X, \leq_P)$, es $t_P(y) = 0$.

Una vez determinada una magnitud $(X, \leq_P, t_P)$, *se dirá que la misma es el significado de P en X.*

<u>Notas</u>

1) La propiedad (a) es básica; la medida crece con el crecimiento de cuán P son los elementos de X. Si, por ejemplo unas veces creciese y otras decreciese, la medida no serviría para comparar cuán P son los elementos de X.

Gracias a cada t_P se pasa de "cuán P" a "cuánto P".

2) Las propiedades (b) y (c) no indican sino que aquellos elementos para los que no hay otros que, respectivamente, sean más o menos P que ellos, tienen medida máxima o mínima. Sin embargo, es perfectamente posible que en $(X, \leq_P)$ no haya maximales, o no haya minimales.

3) Las tres propiedades son, en general, insuficientes para individuar una única función t_P y sólo permiten considerar a qué familia genérica pertenecen todas ellas.

3. LA MULTIPLICIDAD DE SIGNIFICADOS

<La multiplicidad de significados se manifiesta en el hecho de que puedan existir muchas medidas como sucede, por ejemplo, con las medidas de probabilidad.>

*La existencia del colectivo **P** generado en X por P, se "insinúa" por todos los posibles significados de P en X; a un tal colectivo cabe verlo, por tanto, a través de toda la familia de posibles significados y de cada uno de ellos se dirá que es un estado del colectivo, que el colectivo se muestra bajo tal estado. El colectivo sólo se presenta a través de sus estados. Cada estado depende de la información (adicional a la de $\leq_P$), o hipótesis de trabajo, que permita fijar una medida t_P; se trata de "estados-informacionales", dependen de aquella información.*

Metafóricamente, cabe imaginar al colectivo como a una nube de datos no conocidos por completo y que, al fijar algunos, la nube se proyecta en forma de un estado; como sucede con las nubes reales que se proyectan en el suelo en formas diversas según como les llegue la luz del sol.

En cada situación informacional, el colectivo se especificará como un estado $(X, \leq_P, t_P)$.

Ejemplo.

En el caso de G, las medidas del significado primario $([0, 1000], \leq_G)$, *una vez aceptado que sea* $\leq_G = \leq$, *son todas las funciones* $t_G: [0, 1000] \to [0, 1]$ *verificando:*

a) $x \leq y \Rightarrow t_G(x) \leq t_G(y)$: t_G *es creciente.*

b) $t_G(1000) = 1$

c) $t_G(0) = 0$,

ya que en el grafo sólo hay, en este caso, el máximo 1000 y el mínimo 0. De ellas hay muchísimas.

Por ejemplo, la definida como

$$t_G(x) = 0, \text{ si } x \in [0, 770);$$

$$t_G(x) = 1, \text{ si } x \in [770, 1000],$$

que no es otra que la función de característica, del subconjunto [770, 1000] de X, que es discontinua en el punto x = 770 y es uno de los estados nítidos del colectivo ***G****.*

- *Otro estado de* ***G*** *viene dado por la única función lineal que es posible,* $t_G(x) = x/1000$*, y aún otro por la función cuadrática* $t_G(x) = x^2/1000^2$*, que no es la única entre las funciones cuadráticas que cumplan las propiedades a, b y c; por ejemplo, la única del tipo* $\square x^2 + x$ *es la* $t_G(x) = ((1\text{-}10^3)/10^6)x^2 + x$*.*

En el caso de G, cabe añadir la cuarta condición,*

d) Si es $0 < t_{G*}(x)$*, entonces* $0 < t_{G*}(x - 10^{-m(x)}) \leq t_{G*}(x) \leq t_{G*}(x + 10^{-n(x)}) < 1$*,*

con la cual habrá muchos casos en los que t_{G*} *sea una función continua en todos los puntos de X. Como lo son las anteriores* $x/1000$ *y* $x^2/1000^2$*, que corresponden al tipo* t_{G*}*.*

Para determinar cada una de esas funciones t_{G*} *hace falta más información contextual acerca del comportamiento de G* en X, es decir, alguna condición más que las cuatro anteriores. Esa información puede ser una hipótesis de trabajo conveniente; por ejemplo, que* t_{G*} *sea lineal o cuadrática.*

*Cada estado del colectivo **G**** se obtiene al particularizar la "magnitud genérica" ([0, 1000], **≤**, t_{G^*}) con una función t_{G^*} concreta, obtenida gracias a información adicional, o hipótesis sobre el uso de G* en X, que permita determinarla. En todo caso, hay que saber bien que información o hipótesis adicional se adopta.*

- *Si no pueden enunciarse más condiciones bajo las que se usa "grande", no cabrá calcular una medida concreta; nos quedaremos al simple nivel pre-cualitativo del diccionario.*
-

< ***Medir es, sin embargo, una necesidad científica y tecnológica>***

La incorporación del concepto de medida hace ver, aun más, que la lógica 'fuzzy' es un tema más propio de la ciencia que de la lógica.

4. COLECTIVOS, FUZZY SETS Y ESTADOS

*Cada uno de los estados de un colectivo **P**, escrito* $\mathcal{P}$, *no es sino un sub-conjunto borroso de X que se obtiene sin más que cambiar la nomenclatura*

$$t_P(x) = r,$$

por la

$$x \in_r \mathcal{P}, \text{ leída "x pertenece a } \mathcal{P} \text{ con grado } r \in [0,1]\text{"},$$

que requiere, no obstante y para ser manejable matemáticamente, una definición acerca de la posible identidad de los estados. Tal definición es:

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} \Leftrightarrow t_P = t_Q ,$$

*con la cual cabe, además, identificar dos colectivos **P** y **Q**, como sigue:*

$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \Leftrightarrow$ *Para todo estado* $\mathcal{P}$ *de **P** existe uno* $\mathcal{Q}$ *de **Q**, tal que* $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, *y recíprocamente.*

Es decir, dos colectivos son idénticos sí y sólo sí tienen los mismos estados; conjuntamente, los estados individúan al colectivo y cada uno de ellos es una <u>especificación</u> del colectivo o del significado primario del predicado. El colectivo es como una suma de los posibles usos del predicado en X; una especie de uso genérico del mismo.

En general, la especificación de un predicado lingüístico graduable es más compleja que la de un predicado binario o rígido el cual uso viene, al fin, dado por una equivalencia o definición "sí y sólo sí" con otra expresión.

- *Por más que pudiese parecer que es intuitivamente más fácil imaginar un conjunto nítido que uno borroso, para desmentirlo basta, por ejemplo, pensar en la cantidad de definiciones formales previas que se necesitan para llegar al modelo de conjunto nítido de los números reales trascendentes y lo difícil que es imaginarlo aislado de **R**. No todos los conjuntos son como cestos de manzanas.*

< Ambos tipos de colectivos, no son sino modelos abstractos >

Está claro que cada estado $\mathcal{P}$ *de* ***P*** *está caracterizado por su función* t_P*, una vez aceptado un significado primario de P en X .*

El colectivo ***P*** *se nos manifiesta, por tanto, mediante sus distintos estados o conjuntos borrosos* $\mathcal{P}$**,** *y para especificar cada uno de ellos se requiere disponer de la información suficiente, o de hipótesis adicionales, para precisar una magnitud numérica* $(X, \leq_P, t_P)$ *traduciendo un significado o uso concreto de P en X.*

< Esta es la visión científica del significado de P en X.>

Hay tantos estados-informacionales como usos de P en X y, cuando el uso de P es preciso en X, el colectivo sólo tiene un estado que es un conjunto nítido y con el cual cabe confundirlo.

<Cuando** P **es preciso**, **P es rígido; en otro caso el colectivo es flexible o deformabl<u>*5. LECTURA ‘À LA ZADEH’*</u>

En la forma habitual de hablar en la teoría de los conjuntos borrosos, el predicado P recibe el nombre de la etiqueta lingüística de $\mathcal{P}$ y la medida t_P el de función de pertenencia a $\mathcal{P}$, que suele escribirse como $\square_P$.

Al no tomar en cuenta el significado primario $(X, \leq_P)$, Zadeh oculta que la función de pertenencia sea una medida. Además, su insistencia inicial en relacionar los fuzzy sets con la lógica polivalente, llevó a 'verlos' como entes puramente lógicos por más que no se conozca una axiomatización tipo Zermelo-Frankel de los mismos.

La multiplicidad de posibles funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta lingüística, lo que marca una de las diferencias con la teoría de conjuntos, se manifiesta en el hecho implícitamente aceptado de que $\square_P$ deba diseñarse a partir de la información disponible acerca del uso conocido de P en X. El concepto de diseño de un sistema, marca otra de tales diferencias.
<La génesis lingüística que se ha presentado podría llamarse una teoría 'naïve' de los conjuntos borrosos >

6. EL SIGNIFICADO DE TRABAJO Y SU PELIGRO

Cuando dos enunciados "x es P" e "y es P" no puedan compararse como 'uno es menos que el otro', es decir, no quepa establecer si es $x \leq_P y$ o si es $y \leq_P x$, siempre será $t_P(x)$ menor o mayor que $t_P(y)$; el carácter lineal del orden numérico fuerza que elementos de X no comparables en cuanto a P, siempre tengan medidas comparables. Ello es otra de las diferencias entre los clásicos y los fuzzy; en los primeros la relación $\leq_P$ se reduce a la $=_P$.

Una vez establecida una medida t_P, de manera automática se define en X la nueva relación $\leq_{tP}$:

$$x \leq_{tP} y \Leftrightarrow t_P(x) \leq t_P(y),$$

que es más extensa que la $\leq_P$:

$$x \leq_P y \Rightarrow t_P(x) \leq t_P(y) \Leftrightarrow x \leq_{tP} y,$$

es decir,

$$\leq_P \subseteq \leq_{tP}.$$

Con ello, (X, $\leq_{tP}$) ***podría llamarse el 'working-meaning' de P en X .***

La medida t_P sólo ***refleja perfectamente*** *(es decir, verifica $\leq_P = \leq_{tP}$) el significado primario de P, cuando las dos relaciones coincidan.*

<El working-meaning desaparece, de hecho, si P es nítido; sólo es significativo si P es impreciso.>

Obsérvese que no será siempre $\leq_P = \leq_{tP}$, ya que la nueva relación $\leq_{tP}$ es lineal, mientras que la antigua $\leq_P$ no lo es en general.

Por lo tanto, los estados-informacionales de un colectivo no pueden reflejar perfectamente el uso primario del predicado medible, salvo que el mismo se traduzca por una relación $\leq_P$ que sea lineal, es decir, sin pares de elementos de X que no sean comparables.

El diseñador de un sistema fuzzy debe tener en cuenta que al limitarse a ver P a través de μ_P está añadiendo bien información, bien alguna hipótesis de trabajo al significado de P.

Diseñar mal μ_P puede llevar a tratar un problema distinto de aquel que se tenga.

En muchos casos, por lo tanto, la medida t_P no puede ir más allá de aproximar el significado primario; algo que no sólo hay que tener en cuenta, sino que debe llevar a diseñar la medida lo mejor posible, con la mayor cantidad de información disponible sobre el comportamiento de P en X y/o a controlar cuidadosamente las hipótesis que se requieran para obtener μ_P, como es la de que, por simplicidad, sea un trapecio.

En general, la medida le añade algo al significado cualitativo, primario, lo altera; introducir una medida concreta aumenta el significado primario hasta el significado de trabajo.

En las aplicaciones, los conjuntos borrosos suelen emplearse funciones de pertenencia μ_P que, de no venir diseñadas con toda la información contenida en $\leq_P$, no son sino aproximaciones, en grado desconocido, de alguna medida t_P. Más aún con el uso tan frecuente de funciones trapezoidales.

Ejemplo

El predicado A = "alrededor de cuatro" en el intervalo [0, 10], se usa de la forma siguiente:

a) No cabe afirmar "0 es A" ; b) No cabe afirmar "10 es A"; c) Cabe afirmar "4 es A"

d) Si x avanza desde 0 hasta 4, se llega a un momento en el cual ya cabe afirmar "x es A";

e) Si x retrocede desde 10 hasta 4, se llega a un momento en el cual ya cabe afirmar "x es A".

Con ello:

$x \leq_A y$ sí y sólo sí: $0 \leq x \leq y \leq 4$, o $4 \leq y \leq x \leq 10$,

0 y 10 son minimales y 4 es maximal, sin poder excluir la existencia de otros elementos que también tengan medidas máxima o mínima; para ello se requiere más información.

Obviamente, la relación $\leq_A$ no es lineal puesto que, por ejemplo, ni es $2 \leq_A 7$, ni es $7 \leq_A 2$.

<Ninguna medida podrá reflejar perfectamente ese significado primario>

Las medidas t_A (= t) son las funciones [0, 10] $\rightarrow$ [0, 1] tales que,

1) $t(0) = t(10) = 0$;

2) $t(4) = 1$,

3) $0 \leq x \leq y \leq 4 \Rightarrow 0 \leq t(x) \leq t(y) \leq 1$;

4) $4 \leq x \leq y \leq 10 \Rightarrow 1 \geq t(x) \geq t(y) \geq 0$,

5) En el intervalo [0, 4) existe un punto x_0 tal que en $[0, x_0]$ la función t vale cero.

6) En el intervalo (4, 10] existe un punto x_1 tal que en $[x_1, 10]$ la función t vale cero,

es decir, se trata de las funciones que valiendo 0 entre $x = 0$ y $x = x_0$ crecen desde ese punto hasta valer 1 en $x=4$ y, entonces, decrecen hasta 0 en x_1, y valen de nuevo 0 hasta $x = 10$.

De ellas hay muchas; por ejemplo, la lineal a trozos (trapezoidal),

$t(x)=0$, *si* $0 \leq x \leq x_0$, *y si* $x_1 \leq x \leq 10$;

$t(x)= (x_0 – x)/(x_0 - 4)$, *si* $x_0 \leq x \leq 4$;

$t(x) = (x – x_1)/(4 – x_1)$, *si* $4 \leq x \leq x_1$.

Por lo tanto, las medidas que permiten disponer de los conjuntos borrosos que son estados-informacionales del colectivo ***A*** *="números alrededor de 4" entre 0 y 10, dependen de los parámetros* x_0 *y* x_1 *así como de la forma de crecimiento entre* x_0 *y 4, y de la de decrecimiento entre 4 y* x_1 *que, en el ejemplo anterior, son ambos lineales.*

< Nótese, sin embargo, que tanto el primero podría ser lineal y el segundo cuadrático, como ambos de otros tipos y sin necesidad de simetría alrededor de la recta x = 4; todo depende de la información o hipótesis adicional de la que se disponga sobre el uso concreto de A en [0, 10]. La forma trapezoidal es una simplificación que, sin embargo, puede ser muchas veces aceptable>

7. CONJUNTOS BORROSOS COMPLEJOS

<Cabe plantearse la pregunta de si puede existir alguna modificación que permita salvar el escollo de que elementos no comparables cualitativamente puedan tener medidas igualmente no comparables.
Para ello y salvo cuando la relación $\leq_P$ sea lineal, los valores de las medidas no pueden ser números en el intervalo unidad o, en general, números reales, ya que el orden de la recta real es lineal. Sin embargo, que el orden de los valores de las medidas t_P sea lineal no afecta a las tres propiedades que las caracterizan. Para satisfacerlas basta la existencia, en el conjunto de valores, de una relación de orden, por ejemplo parcial y con elementos mínimo y máximo para capturar la medida de maximales y minimales, si los hay.>

Para intentar salvar tal escollo, cabe tomar como conjunto de valores de las medidas el cuadrado-unidad-complejo, es decir, el conjunto

$$\mathbf{C} = \{a + ib;\ 0 \leq a \leq 1\ \&\ 0 \leq b \leq 1\},$$

el cual, provisto del orden parcial, típico de los números complejos,

$$a + ib \leq a^* + ib^* \Leftrightarrow a \leq a^* \;\&\; b \leq b^*,$$

tiene el mínimo $\mathbf{0} = 0 + i0$ *y el máximo* $\mathbf{1} = 1 + i$*. Además, el intervalo unidad real es la parte de* **C** *con* $b = 0$*.*

Con ello, las funciones t serían de la forma $t(x) = t_1(x) + it_2(x) \in \mathbf{C}$*, verificando,*

1) $x \leq_P y \Rightarrow t(x) \leq t(y) \Leftrightarrow t_1(x) \leq t_1(y) \;\&\; t_2(x) \leq t_2(y)$;
2) *Si* x_0 *es minimal respecto de* $\leq_P$, *es* $t(x_0) = \mathbf{0}$;
3) *Si* x_1 *es maximal respecto de* $\leq_P$, *es* $t(x_1) = \mathbf{1}$,

Se abriría la puerta a que, cuando x no sea $\leq_P$*-comparable con y, también t (x) pueda no serlo con t (y).*
Aunque no se podría garantizar que siempre fuese $\leq_P = \leq_t$*, se facilitarían más posibilidades al no ser lineal el orden entre los números complejos.*

< ¡LAS MEDIDAS COMPLEJAS NO SON RARAS EN LA CIENCIA ¡>

- *Cuando, en la práctica, no se pueden determinar los valores t(x) de una medida más que con cierta aproximación*

$$t(x) \in [t_1(x), t_2(x)] \subseteq [0, 1],$$

cabe tomar una medida-compleja del tipo $t^*(x) = t_1(x)+it_2(x) \in \mathbf{C}$.

- *El conjunto X de los sub-intervalos cerrados de [0, 1] puede dotarse del orden de* ***C*** *y con él ambos son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados.*

Ejemplo.

X es el conjunto de todos los intervalos $[a, b] \subseteq [0, 1]$, *con un predicado P tal que:* $[a_1, b_1] \leq_P [a_2, b_2] \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \ \& \ b_1 \leq b_2$, *y la función* $t^*: X \to \mathbf{C}$, *es la definida por*

$$t^*([a, b]) = b + i.(a+ b)/2.$$

<Un tal predicado P podría ser "a la izquierda", con lo que cabría interpretar lingüísticamente la relación $\le_P$ *como "más a la izquierda que".>*

De ser,

$$[a_1, b_1] \le_P [a_2, b_2],$$

es, $t^*([a_1, b_1]) = b_1 + i.(a_1 + b_1)/2 \le b_2 + i.(a_2 + b_2)/2 = t^*([a_2, b_2]$,

y como, además, es

$$t^*([0, 0]) = \mathbf{0} \text{ y } t^*([1,1]) = \mathbf{1},$$

$(X, \le_P, t^*)$ *resulta ser una magnitud (compleja) que representa el uso del tal P en X.*

- *En ese ejemplo, hay intervalos como los [0.01, 0.21] y [0.1, 0.2] que no son* $\le_P$*-comparables y cuyas medidas respectivas,* $t^*([0.01, 0.21]) = 0.21+0.11i$ *y* $t^*([0.1, 0.2])= 0.2+0.15i$*, tampoco lo son.*

-

- *Las medidas complejas ahorran el uso de “pintoresquismos” como el de los ‘interval fuzzy sets’, usualmente tomados como type-2 fuzzy sets.*

<NO DEBERÍA OLVIDARSE QUE JUSTAMENTE FUE PARA MEDIR, QUE LOS NÚMEROS SE FUERON AMPLIANDO DE LOS ENTEROS A LOS COMPLEJOS>

8. CONJUNTOS BORROSOS ABSTRACTOS

Hay una forma abstracta y de tipo cualitativo, que garantiza una medida no numérica reflejando perfectamente el significado primario.

Consiste en tomar (sólo si la relación $\leq_P$ *es un preorden, es decir, goza de las propiedades reflexiva y transitiva) como conjunto de valores al conjunto cociente* $X/{=_P}$*, obtenido con la relación simetrizada,*

$$x =_P y \Leftrightarrow x \text{ es igualmente } P \text{ que } y \Leftrightarrow x \leq_P y \;\&\; y \leq_P x\,,$$

que es de equivalencia y tiene las clases $[x] = \{y \in X;\ y =_P x\}$*,que dan el cociente* $X/{=_P} = \{[x];\ x \in X\}$*.*

La relación $[x] \leq_P^* [y] \Leftrightarrow x \leq_P y$*, que no depende de los respectivos representantes de cada clase, es un orden parcial que da el nuevo grafo o conjunto parcialmente ordenado* $(X/{=_P}, \leq_P^*)$*, al que también cabe llamar* *significado primario de P en X.*

Entonces, basta tomar la medida (cualitativa), $t(x) = [x]$, verificando:

$$x \leq_P y \Leftrightarrow [x] \leq_P^{*} [y] \Leftrightarrow x \leq_t y \ ,$$

que puede llamarse medida natural, para que con ella se refleje perfectamente el significado primario al ser $\leq_P = \leq_t$.

<Obviamente, todos los elementos de una misma clase tienen igual medida y, por lo tanto, las medidas tienen tantos valores distintos como número de clases haya en $X/=_P$.>

NOTA.

*Lo anterior abre la puerta a la posibilidad de ampliar el concepto de medida por medio de conjuntos parcialmente ordenados (L, ≤), con mínimo y máximo para dar valores a los minimales y maximales respecto de $\leq_P$, como los anteriores **C** y $X/=_P$, y que permite llegar a considerar un nuevo tipo de estados informacionales o L-conjuntos borrosos.*

*Obviamente, cuando es (L, ≤) = ([0, 1], ≤) aparecen los conjuntos borrosos ordinarios o de Zadeh. Con **C** aparecen los borrosos complejos.*

Tales entidades matemáticas (L-fuzzy sets), fueron sintácticamente introducidas por J.A. Goguen, insistiendo en la conveniencia, por razones cercanas a las de la lógica formal clásica, de que L esté dotado de más estructura que la de un conjunto parcialmente ordenado, como es el caso de un retículo completo. Aquí se recuperan, sin embargo, con un carácter más general al no requerirse que (L,

≤) sea más que un conjunto parcialmente ordenado y estar todo ligado a la semántica del problema. Se abre así la puerta a una medición cualitativa.

CONCLUSIONES

- *El concepto intuitivo y metafórico de colectivo como una nube de datos indeterminados, que se especifica por sus sombras o estados obtenibles cuando más datos son conocidos o supuestos, es un concepto que requiere más elaboración matemática. En principio, no hay diferencia alguna entre el 'significado de P' en X y el 'colectivo de los P de X'.*

Parecería que el colectivo, generado por la acción del predicado en X y que se especifica con cada uso particular del mismo, genera una especie de campo de interacciones (dicho en forma de nuevo metafórica: como las electroquímicas que generan las nubes) puestas de manifiesto por los estados-informacionales.

< Dejo la pregunta: ¿UNA POSIBLE "DINÁMICA DEL LENGUAJE"?>

Se trata de ideas un tanto vagas, aún por explorar y que eventualmente pueden llevar al estudio de las interrelaciones entre conjuntos finitos de colectivos; por ejemplo, aquellas con las cuales la conjunción copulativa o la conjunción disyuntiva, podrían aparecer como formas de generar nuevos colectivos a partir de otros dos anteriores (como dos nubes se mezclan o separan).

También sería el caso de los antónimos u opuestos vistos como 'roturas parciales' de los mismos colectivos, aunque manteniendo con ellos determinadas influencias hasta separarlos al máximo dado por su negación. Una separación que sólo llegaría a ser completa en algunos casos como, en particular, si el predicado es rígido.

< Dejo la pregunta: ¿UNA POSIBLE "GEOMETRÍA DEL LENGUAJE"?>

- *En una nueva visión informacional y hasta cierto punto dinámica del cálculo de predicados precisos e imprecisos, debería tener un lugar la consideración de parámetros contextuales como son la entropía y la especificidad. Unas magnitudes, sin las cuales los conjuntos borrosos son poco más que funciones matemáticas con nombre, asociadas a los colectivos a través de sus estados que si, idealmente, estuviesen ligadas por alguna relación en forma de igualdad o desigualdad, podrían resultar muy útiles para los procesos de diseño de las funciones de pertenencia de los estados.*

<Una tal expresión algebraica ayudaría a controlar la capacidad de representar lo mejor posible el uso del predicado sí, por ejemplo, contuviese unos parámetros que pudiesen acotarse en cada caso, contexto y propósito del uso.>

- *Todo esto no es sino una posible ventana, abierta por la imaginación al pensamiento científico, y facilitada por la visión de los conjuntos borrosos como estados-informacionales del uso del predicado.*

- *Una ventana que, de propiciar unos análisis como los típicos de las ciencias experimentales, podría llegar a significar un giro intelectual respecto de los estudios lógico-formales del lenguaje natural que, si hoy en día ya están evolucionando en sentido de experimentación controlada, aún no cuentan con el soporte de unas bases matemáticas como sucede, por ejemplo, en la física.*

- *Una ventana que podría permitir avanzar en el conocimiento del actualmente misterioso concepto de 'información'; tal vez por medio de parámetros como la borrosidad y la especificidad.*

Una ventana sin la cual el CwW no va a ir más allá de llegar a ser sino una colección inconexa de técnicas de computación con fuzzy sets. < Lo que no es poco, pero que me parece insuficiente >

< ¡NO HE PRETENDIDO SINO ABRIR ESA VENTANA PARA MOSTRARLES QUE AÚN SE PUEDE IR A MÁS! >

LA LÓGICA FUZZY VA A CUMPLIR 50 AÑOS EN 2015 Y HA TENIDO NOTABLES ÉXITOS…

¿ES TIEMPO DE REPENSAR SUS FUNDAMENTOS?

CREO QUE SÍ … Y ES COSA DE JÓVENES INTELECTUALMENTE ATREVIDOS.

¡MUCHAS GRACIAS!